Eracle3:
Lezioni di Matematica Finanziaria

Prof. Rosella Giacometti,
Prof. Marida Bertocchi
Università di Bergamo

Alcuni problemi reali

Alfa GT. Superate le vostre aspettative.

Un coupé sportivo che esalta il piacere di guida, ma anche un'elegante berlina in cui domina il comfort e lo spazio. L'auto dei desideri realizzati. Una linea compatta e aggressiva in cui vive tutta la tradizione sportiva Alfa Romeo.

Una forma che si plasma a seconda delle esigenze e che sa adattarsi con grande versatilità a necessità differenti di guida, spazio e vivibilità.

Con **Alfa GT** il comfort di viaggio raggiunge nuovi traguardi. E premia chi vuole vivere emozioni sportive senza rinunciare alle comodità.

Promozione Alfa GT

Dal **26 aprile**, fino al **31 luglio**, Alfa GT può essere tua a partire da **372,00 euro** al mese (IVA inclusa).
Clicca qui per vedere l'esempio.

Prova Alfa GT e vinci un corso di Guida Sicura.

Prenota un **Test Drive** presso una **Concessionaria Alfa Romeo** e potrai vincere un **Corso di Guida Sicura** per **due persone, presso il CIGS di Andrea de Adamich**.

Dal **12 Aprile al 31 luglio**, dopo aver effettuato il Test Drive con Alfa GT, richiedi al tuo Concessionario **la cartolina** per partecipare al **Concorso**: ti basterà compilarla, inviando via sms il codice situato nell'apposito riquadro, per partecipare all'estrazione mensile di uno dei premi messi in palio per te da Alfa Romeo.
Cosa Aspetti allora? Prova Alfa GT, compila la Cartolina e vinci l'emozione di guidare in tutta sicurezza.

Inserisci i tuoi dati personali.
Alfa Romeo ti contatterà direttamente per segnalarti il Concessionario più vicino e concordare la tua prenotazione.

I campi contrassegnati con l'asterisco sono obbligatori.

Nome*:
Cognome*:
E-mail*:
Inserire il numero di telefono fisso e/o di cellulare:*
Numero di telefono fisso:

Esempio riferito ad Alfa GT 1.8 T. S.

- Prezzo chiavi in mano (I.P.T. esclusa) 27.693,00 euro
- Anticipo 5.000,00 euro
- Durata 72 mesi
- 72 rate mensili da 372,00 euro
- Copertura assicurativa Prestito Protetto
- Zero maxirata finale
- Spese gestione pratica 185,00 euro + bolli
- T.A.N. 3,95%
- T.A.E.G 4,30%
- Salvo approvazione Sava

Alcuni problemi reali

Alcuni problemi reali

Alcuni problemi reali

La Matematica Finanziaria classica

- Studia operazioni di scambio di **moneta contro moneta** che si protraggono **nel tempo**, considerate in condizioni di **certezza**.

Elementi fondamentali:

Importi

Tempi **a cui gli importi si rendono disponibili**

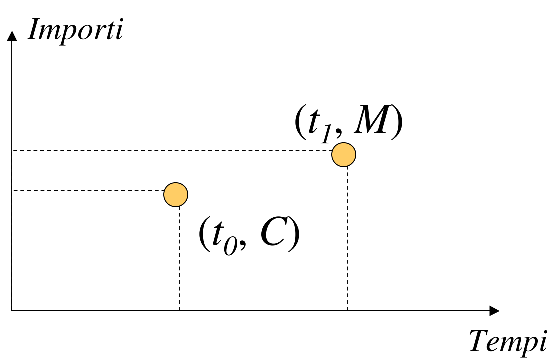
Certezza ≠ Matematica attuariale (es. pagamento in caso di morte, flusso non certo)

Situazioni finanziarie elementari (SFE)

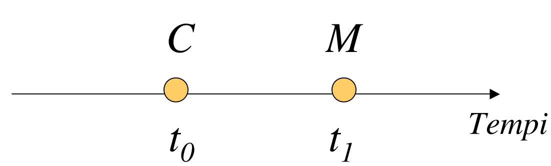
- Una SFE è una coppia ordinata (t,K) che rappresenta la disponibilità dell'importo K al tempo t
- Due SFE – ad es. (t_0, C) e (t_1, M) sono <u>equivalenti</u> se si ritiene equo lo scambio tra le due
  - Es. (0, 100) può essere equivalente a (1, 110)
  - Di solito $t_1 > t_0$ e spesso $t_0 = 0$

Rappresentazione grafica delle SFE

Primo modo: piano cartesiano tempi/importi

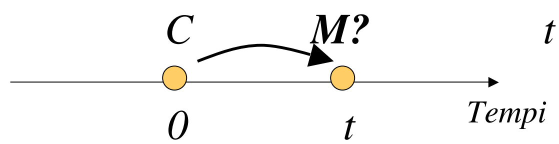


Secondo modo: asse dei tempi (importi solo annotati sopra)



Leggi finanziarie di capitalizzazione

- Sono leggi che ci aiutano a trovare quel M ("montante") che rende equivalenti queste due SFE:



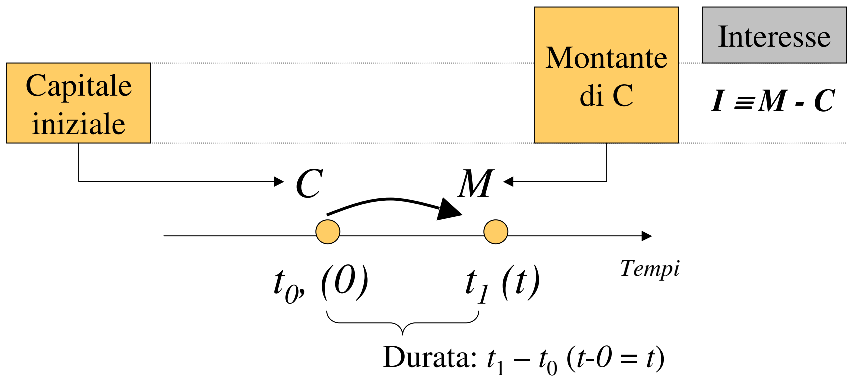
$t > 0$

- In pratica, dati C ("capitale") e t ("scadenza"), dobbiamo scegliere una funzione $M = Cm(t)$

Proprietà richieste a un fattore di montante $m(t)$

1. $m(t)$ sia definita $\forall t \in [0,T)$
2. $m(0) = 1$
   – Se la durata è nulla, il fattore di montante è 1
3. Dati $t_2 > t_1 \rightarrow m(t_2) \geq m(t_1)$
   – La funzione è monotòna non decrescente in t

Terminologia: capitalizzazione



Tasso di interesse:
$$i(t_0,t_1) \equiv \frac{I}{C} = \frac{M-C}{C}$$

Fattore di montante:
$$m(t_0,t_1) \equiv \frac{M}{C} = 1+i$$

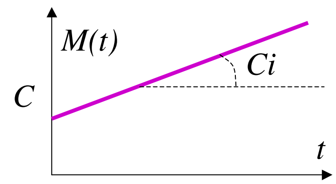
relativi all' intervallo tra t_0 e t_1

In pratica…

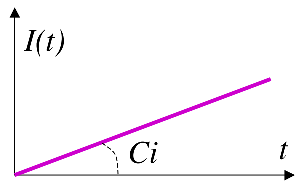
- Studieremo in particolare due famiglie di leggi di capitalizzazione…
  - Lineari, esponenziali, …ma <u>qualunque funzione</u> rispetti i requisiti posti sopra è un fattore di montante

Utilizzo dell'interesse semplice

- Montante
  $M(t) = Cm(t) = C(1+it) =$
  $= C + Cit$



- Interesse
  $I(t) = M - C = C + Cit - C$
  $= Cit$



Ricordiamo l'equazione della retta y=mx+q

Esempio 1

- Utilizzando il regime di capitalizzazione semplice, calcolare montante e interesse dei seguenti capitali impiegati alle condizioni indicate:
  - € 500 per 1 anno al tasso del 12% annuo:
    $M(1) = C(1+it) = 500 \cdot (1+12\% \cdot 1) = 500 \cdot 1{,}12 = 560$
    $I(1) = Cit = 500 \cdot 12\% \cdot 1 = 60$
  - € 1.200 per 8 mesi al tasso del 11% annuo:
    $M(8/12) = 1200 \cdot (1+11\% \cdot 2/3) \cong 1288$
    $I(8/12) \cong 88$
  - € 600 per 7 mesi al tasso del 2,5% trimestrale:
    $M(7/3) = 600 \cdot (1+2{,}5\% \cdot 7/3) \cong 635$
    $I \cong 35$

Esempio 2

- Calcolare quale capitale impiegato al tasso annuo del 9%, in regime di capitalizzazione semplice, dà in 3 mesi e 10 giorni un interesse di € 115.

$$Cit = C \cdot 9\% \cdot \frac{100}{365} = 115$$

$$C = 115 \frac{365}{100 \cdot 9\%} = \frac{115 \cdot 365}{9} \cong 4664$$

Esempio 3

- Calcolare a quale tasso d'interesse annuo è stato impiegato il capitale di € 2.500 che ha prodotto in 8 mesi l'interesse semplice di € 175.

$$Cit = 2500 \cdot i \cdot \frac{8}{12} = 175$$

$$i = \frac{175}{2500}\frac{3}{2} = 10{,}5\%$$

Esempio 4

- In quanto tempo il capitale di €1200 impiegato al tasso d'interesse annuo del 10,5% produce interesse semplice di € 84?

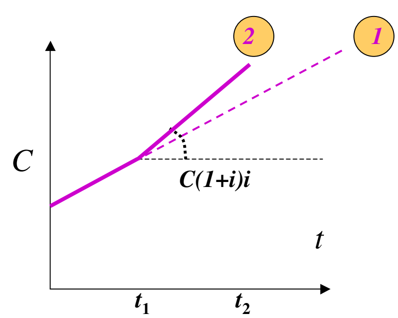
$$t \,|\, Cit = 1200 \cdot 10{,}5\% \cdot t = 84$$

$$t = \frac{84}{1200}\frac{100}{10{,}5} = \frac{84}{12 \cdot 10{,}5} = \frac{2}{3} \qquad = 8 \text{ mesi}$$

Interruzione e reinvestimento

1) $M = C(1+it_2)$

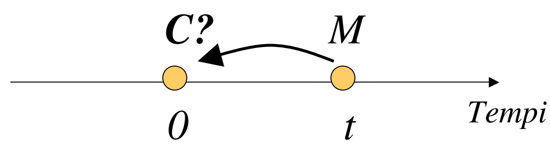
2) $M^* = C(1+it_1)[1+i(t_2-t_1)] =$
$= \underbrace{C[1+it_1+i(t_2-t_1)+i^2 t_1(t_2-t_1)]}_{\boxed{> C\,(1+it_2)}}$



"Scindere" l'operazione d'investimento diventa vantaggioso per l'investitore e svantaggioso per il debitore (ad es. la banca)

Leggi finanziarie di attualizzazione

- Dato M in t, trovare quel C che rende equivalenti queste due SFE:



- Attenzione al verso della freccia: stiamo “tornando indietro” da *M* a *C*, e cerchiamo una $C = Mv(t)$

Esempio

- Se tra 3 anni vogliamo avere a disposizione 1000 euro, quanto dobbiamo investire oggi al tasso del 1% annuo in c.s.?

Fattore di attualizzazione (o fattore di sconto)

- Data qualunque legge di capitalizzazione:

$$M = C \cdot m(t)$$

- possiamo ricavare

$$C = \frac{M}{m(t)} = M \frac{1}{m(t)} \equiv M\, v(t)$$

Fattore di sconto che esprime la legge di attualizzazione associata, o coniugata a m(t)

  – Nota: $v(t)$ è un fattore di sconto valido solo se il suo $m(t)$ coniugato rispetta le tre condizioni viste in precedenza.

Proprietà richieste a un fattore di sconto $v(t) \equiv 1/m(t)$

Fattore di montante

1. *m(t)* definita $\forall t \in [0,T)$
2. $m(0) = M(1,0) = 1$
3. Dati $t_2 > t_1$ $\rightarrow m(t_2) \geq m(t_1)$

(già viste)

Fattore di sconto

1. *v(t)* definita e positiva $\forall t \in [0,T)$
2. $v(0) = 1/\,m(0) = 1$
3. Dati $t_2 > t_1$ $\rightarrow v(t_2) \leq v(t_1)$

(nuove)

Sconto razionale

- Il fattore di sconto è

$$v(t)=\frac{1}{m(t)}=\frac{1}{1+it}$$

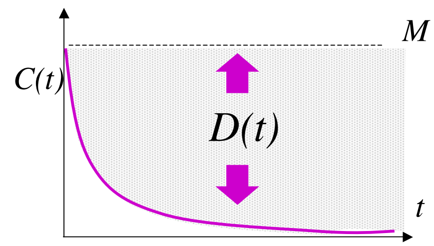
- Il valore attuale è

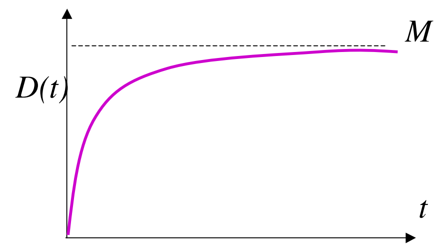
$$C=Mv(t)=\frac{M}{1+it}$$

- Lo sconto è

$$D(t)=M-C(t)=M[1-v(t)]=$$

$$=M\left[1-\frac{1}{1+it}\right]=M\frac{it}{1+it}$$





Esempio 1

- Un amico ha promesso di restituirmi € 510 tra tre mesi in cambio della cifra che gli ho prestato oggi al tasso dell'8% annuo secondo il regime dello sconto razionale. Quanto gli ho prestato?

$$C=\frac{M}{1+it}=\frac{510}{1+8\%\frac{3}{12}}=\frac{510}{1{,}02}=500$$

$$D=M-C=510-500=10$$

Esercizio 1

- Una persona ha un debito di € 410 che scade fra un certo tempo ed un altro debito di € 860 che scade dopo un tempo triplo del primo. Col pagamento di € 1.200 salda i debiti anticipatamente, fruendo di uno sconto razionale del 10% annuo. Determinare le scadenze dei 2 debiti.

Interesse composto

- Supponiamo che C sia investito per 1,2,3… periodi, e che l'interesse venga calcolato come una percentuale fissa (i>0) del montante maturato alla fine del periodo precedente
  - $M(0)=C$
  - $M(1)=C+iC=C(1+i)$
  - $M(2)=C(1+i)+iC(1+i)=C(1+i)^2$

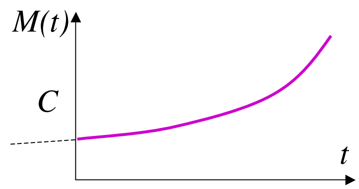
- In generale:
  - $M(t)=C(1+i)^t$

    Cioè, in pratica: $m(t)=(1+i)^t$

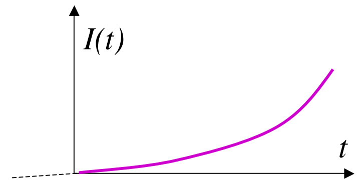
Esempio (C=100, i=4%)
$M(0)=100$
$M(1)=100\cdot(1+4\%)=104$
$M(2)=104\cdot(1+4\%)=$
$=100\cdot 1.04^2=108{,}16$
$M(3)=108{,}16\cdot 1{,}04=$
$=100\cdot 1.04^3=112{,}49$

Utilizzo dell'interesse composto

- Montante
  $M(t) = Cm(t) = C(1+i)^t$



- Interesse
  $I(t) = M - C = Cm(t) - C =$
  $= C\left[(1+i)^t - 1\right]$



Esempio 2

- Determinare in quanto tempo un capitale impiegato ad interesse composto del 10% annuo si raddoppia; e in quanto tempo si triplica.

$$C(1+10\%)^t = 2C$$
$$1{,}1^t = 2$$
$$t = \log_{1,1} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \cong 7{,}27$$
$$1{,}1^t = 3$$
$$t = \log_{1,1} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}1} \cong 11{,}53$$

Rispettivamente:
7,27 anni
e 11,53 anni

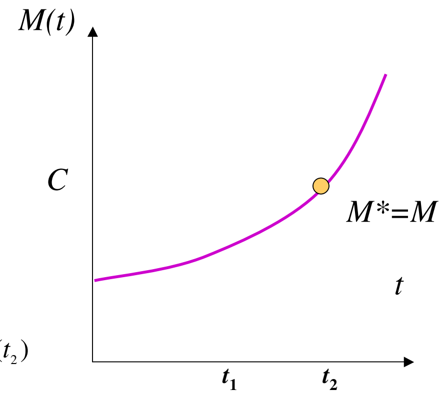
Interruzione e reinvestimento

- Operazione non interrotta:

$$M = Cm(0,t_2)$$

- Operazione interrotta:

$$M^* = Cm(0,t_1)m(t_1,t_2) =$$
$$= C(1+i)^{t_1}(1+i)^{(t_2-t_1)} = C(1+i)^{t_2} = M(t_2)$$



L'operazione è "scindibile" senza conseguenze per l'investitore o il finanziatore

Sconto composto

- Il fattore di sconto è

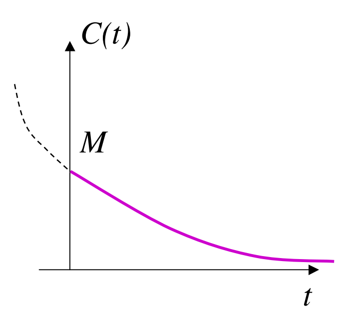
$$v(t) = \frac{1}{m(t)} = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$$

- Il valore attuale è

$$C = Mv(t) = M(1+i)^{-t}$$

- Lo sconto è

$$D(t) = M - C(t) = M\left[1-(1+i)^{-t}\right]$$



Esempio

- Un amico ha promesso di restituirmi € 20000 tra 5 anni in cambio della cifra che gli ho prestato oggi al tasso dell'12% annuo secondo il regime dello sconto composto. Quanto gli ho prestato? Se, anziché concedere il prestito, investissi al 16% annuo, quanto otterrei tra 5 anni?

$$C = M(1+i)^{-t} = 20000(1+12\%)^{-5} \cong 11348{,}6$$

$$M = C(1+i)^{t} \cong 11348{,}6(1+16\%)^{5} \cong 23835{,}8$$

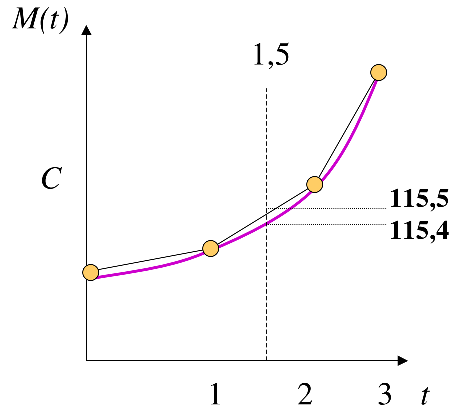
***meno* 20.000 =**
Guadagno: € 3.835,8

Capitalizzazione composta quando *t* non è intero: 2 opzioni

- Se $t = n + f$, con in intero e $0 < f < 1$
  - Es. C=100, i=10%, t=1,5 (un anno e sei mesi: ***n=1;f=0,5***)
- Convenzione esponenziale (c.c./c.e.)
  - Applico la formula di $M(t)$ composto a questo t non intero
    $M(t)=C(1+i)^{t}=C(1+i)^{n+f}$
    $M(1{,}5)=100\cdot(1+10\%)^{1{,}5} \cong 115{,}4$
- Convenzione lineare (c.c./c.l.), o mista
  - Uso la capitalizzazione composta per la parte intera n, e quella semplice per la parte frazionaria f
  - $M(t)=C(1+i)^{n}\,(1+if)$
  - $M(1{,}5)=100\cdot(1+10\%)^{1}\cdot(1+0{,}5\cdot 10\%) \cong 115{,}5$

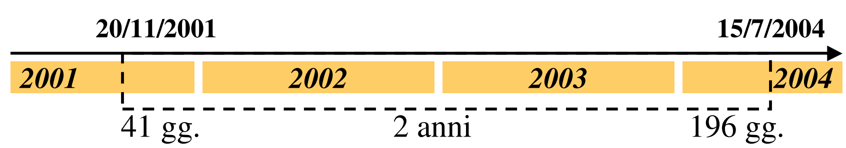
Capitalizzazione composta in convenzione lineare (c.c./c.l.)

- Possiamo vederla come una spezzata che coincide con l'esponenziale del montante composto solo alle scadenze intere
- Poiché è lineare a tratti, sta "sopra" l'esponenziale (convessa) per tutti i t non interi (v. esempio della pagina precedente)



Esempio

- Calcolare il montante di 1250 in c.c./c.l. o capitalizzazione mista, per il periodo dal 20 Novembre 2001 al 15 Luglio 2004, se il tasso annuo di interesse è 7,5%.



$$M = Cm\left(\frac{41}{365}\right)m(2)m\left(\frac{196}{365}\right) =$$

$$= 1250\left(1 + 7{,}5\%\frac{41}{365}\right)(1 + 7{,}5\%)^2\left(1 + 7{,}5\%\frac{196}{365}\right) \cong$$

$$\cong 1250 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}16 \cdot 1{,}04 \cong 1515{,}37$$

Confronto tra regimi di interesse

1	Capitalizzazione semplice	$m_s(t) = 1 + it$
2	Interesse composto	$m_c(t) = (1+i)^t$

Dato un certo tasso i, quale regime è più conveniente per il debitore o per il creditore?

Confronto tra regimi di interesse

- Le curve passano per i punti **(0,1)** e **(1,1+*i*)**
- Tuttavia, la diversa curvatura fa sì che

  $m_c(t) < m_s(t)$ se $t < 1$

  $m_c(t) > m_s(t)$ se $t > 1$

Ad es., per durate inferiori a un periodo, un **debitore** preferisce l'interesse composto